a) Montrer que : $S_n = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$ et que : $V_n = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

b) En déduire que : $|V_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+2}$ puis calculer la limite de (V_n).

3.a) En utilisant une intégration par parties pour U_n, montrer que : $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}.(\ln 2 - V_n)$

b) En déduire la limite de (Φ_n) définie par : $W_n = (n+1) U_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°15 : Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

1. Etudier le sens de variation de f.

2.a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq \frac{\ln(k)}{k^2}$

b) Par une intégration par parties, calculer $\int_a^b \frac{\ln x}{x^2} dx$ avec a > 0 et b > 0.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose : $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + ... + \frac{\ln(n)}{n^2}$.

a) Montrer que pour tout, on a : $S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{n^2}$

b) En déduire que : $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln(n)}{n}$

c) Donner un encadrement de S_{100} à 10^{-2} près

Exercice N°16 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

1.a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b) Montrer que la suite (I_n) est convergente et par suite elle est convergente.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

2.a) Par une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + ... + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right)$

3. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \frac{\ln 2}{2!} + \frac{(\ln 2)^2}{3!} + ... + \frac{(\ln 2)^{n-1}}{n!}$.

a) Exprimer (u_n) en fonction de I_n. b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice N°17 : **I-** Soit la fonction g définie sur $]0 ;1]$ par : $g(x) = 2 - 2x + \ln x$

1) Etudier le sens de variation de g.

2) Montrer que g(x) = 0 admet dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ une solution unique α et que : $\forall t \in [\alpha, 1]\ on\ a : 2t - 2 \leq \ln t$.

3) Construire la courbe de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité : 4cm).

Qarray.tn - Aqra Blech- Qarray.tn
Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...